

Soroban Monatsblatt

- Februar 2013 -

Rechnen im Hexadezimalsystem auf dem chinesischen Abakus

Zahlen begegnen uns auf Schritt und Tritt. Die Zahlen im täglichen Leben haben eines gemeinsam: Sie werden im Dezimalsystem ausgedrückt. Dieses ist durch zwei einfache Regeln beschreibbar:

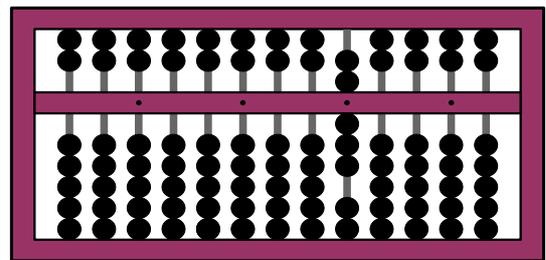
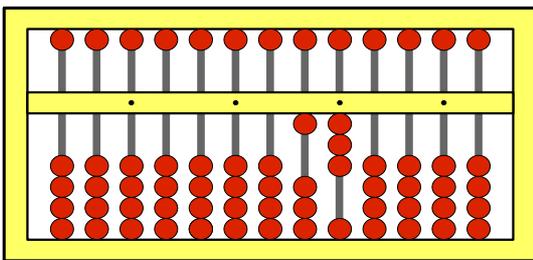
Es gibt zehn Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Wenn zur 9 die Zahl 1 hinzugezählt wird, wird die 9 zur 0 und eine 1 wird auf die nächste Stelle links übertragen: $9 + 1 = 10$

Unsere Vorfahren kannten auch andere Zahlensysteme, z.B. das Zwölfersystem. Heute leicht erkennbar daran, dass die deutsche Sprache bis zur Zahl Zwölf jeweils ein einfaches Wort hat und erst ab der Zahl Dreizehn zusammengesetzte Ausdrücke verwendet.

Ein anderes Zahlensystem ist das Hexadezimalsystem, basierend auf der Zahl 16. In diesem System rechnen oder denken zu können, ist auch heute noch gefragt bei der maschinennahen Computerprogrammierung. Während das Dezimalsystem wohl dadurch entstanden ist, das der Mensch intuitiv mit seinen zehn Fingern zählt, hat das Hexadezimalsystem seine Bedeutung darin, dass man zur Zahl 16 kommt, wenn man mit der 1 beginnend in mehreren Schritten verdoppelt: 1, 2, 4, 8, 16.

Der japanische Abakus oder Soroban hat auf jedem Stab eine Fünfer- und vier Einerperlen zur Darstellung der Ziffern 0 bis 9 und ist damit perfekt geeignet für das Rechnen im Dezimalsystem. - Der chinesische Abakus oder Suan Pan hat dagegen zwei Fünfer- und fünf Einerperlen. Beim Rechnen im Dezimalsystem auf dem Suan Pan kann man einfach die oberste Fünfer- und die unterste Einerperle weglassen. Wenn man alle Perlen benutzt, können auf einem Stab aber auch die Zahlen von 0 bis 15 dargestellt werden.



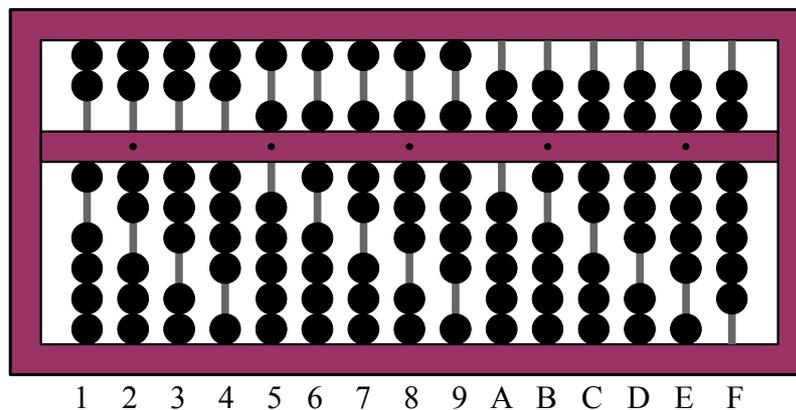
Die Abbildung zeigt die Zahl 13: links auf dem Soroban und rechts auf dem chinesischen Abakus. Wenn wir auf diesem weiter rechnen wollten, würden wir in einem Bereinigungs-schritt die beiden Fünferperlen der 13 nach oben schieben und auf dem Stab links davon eine Einerperle übertragen. Wir hätten dann das gleiche Bild wie links auf dem Soroban. Wir können den Suan Pan aber auch ganz anders benutzen, und damit im Hexadezimalsystem rechnen. Analog zum Dezimalsystem brauchen wir dann über die Ziffern von 0 bis 9 hinaus noch sechs weitere Ziffernsymbole. Man nimmt dafür die Buchstaben A bis F. Die hexadezimalen Ziffernsymbole bestehen also aus den Ziffern 0 bis 9 und den Buchstaben A bis F für die dezimalen Zahlen Zehn bis Fünfzehn. Analog zum Dezimalsystem lauten die Regeln für das Hexadezimalsystem dann:

Es gibt sechzehn Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

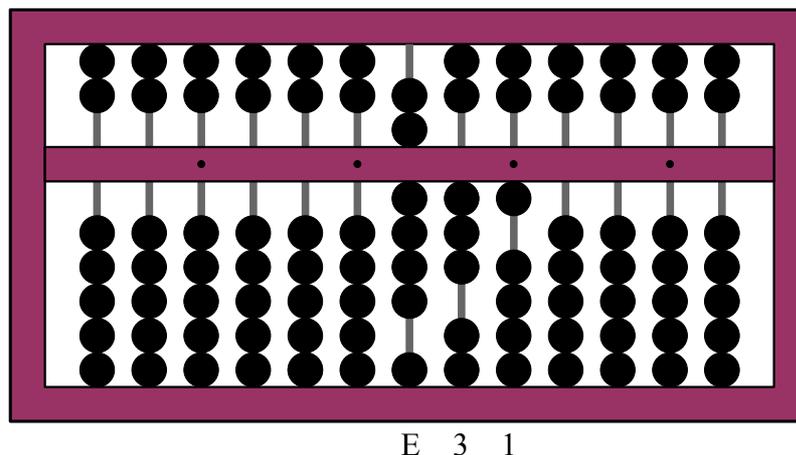
Wenn zur F die Zahl 1 hinzugezählt wird, wird die Zahl F zur 0 und eine 1 wird auf die nächste Stelle links übertragen: $F + 1 = 10$.

Um Verwechslungen vorzubeugen, können hexadezimale Zahlen durch ein angefügtes "h" von dezimalen unterschieden werden, also: $Fh + 1h = 10h$

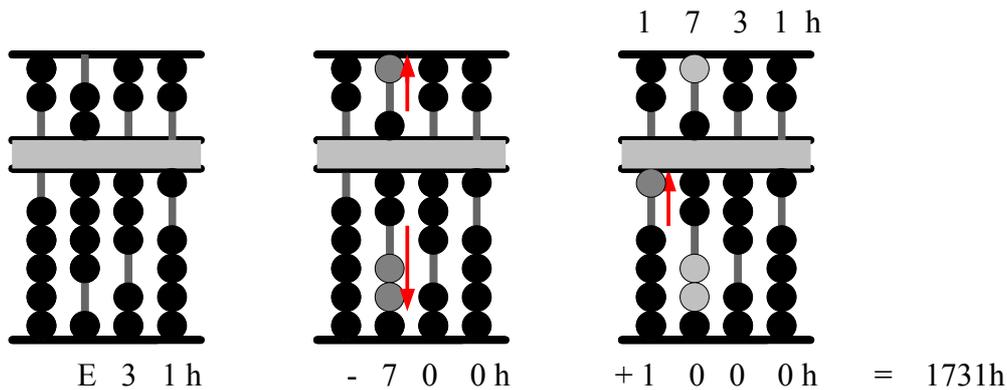
In der Computerprogrammierung wird das Hexadezimalsystem benutzt, um Dualzahlen, die nur aus Nullen und Einsen - den Bits - bestehen, kompakt als Hexadezimalzahlen darzustellen. Wenn Sie jetzt vor der Aufgabe stehen, zwei hexadezimale Zahlen zu addieren, z.B. $E31 + 9A2$, kann man das durch Umrechnungen im Dezimalsystem lösen. Besser ist es aber, wenn es gelingt direkt im Hexadezimalsystem zu denken und zu rechnen. Hier wiederum führt der schnellste Weg über die bildliche Anschauung. Der chinesische Abakus ist dafür didaktisch sehr gut geeignet. Wer einige Rechenbeispiel auf dem Abakus durchgeführt hat, bekommt diese bildliche Vorstellung, mit der dann einfachere hexadezimale Zahlen auch im Kopf über die gedankliche Vorstellung des Gerätes direkt hexadezimal berechenbar werden. Zunächst machen wir uns deshalb ein Bild von den hexadezimalen Ziffern 1 bis F auf den Stäben des Abakus.



Die folgenden Rechenbeispiele orientieren sich an den Rechenmethoden, wie sie für das Dezimalsystem in dem Buch "Soroban - Rechnen mit dem japanische Abakus" beschrieben sind. Für die Addition " $E31h + 9A2h = ?$ " wird zunächst die Zahl E31 auf dem Abakus eingegeben.



Links beginnend wird zu der Zahl Eh, dargestellt durch zwei Fünfer- und vier Einerperlen - und so leicht als dezimale 14 erkennbar - die Zahl $9h$ addiert. Da die Perlen auf dem Stab nicht ausreichen, muss eine Perle auf den Stab links übertragen werden. Da dies einer Addition der Zahl F, oder dezimal 16 entspricht, würden 7 zu viel addiert. Daher werden im ersten Schritt diese 7 durch Entfernen von zwei Einer- und einer Fünferperle abgezogen, bevor eine Einerperle auf den links benachbarten Stab übertragen wird.



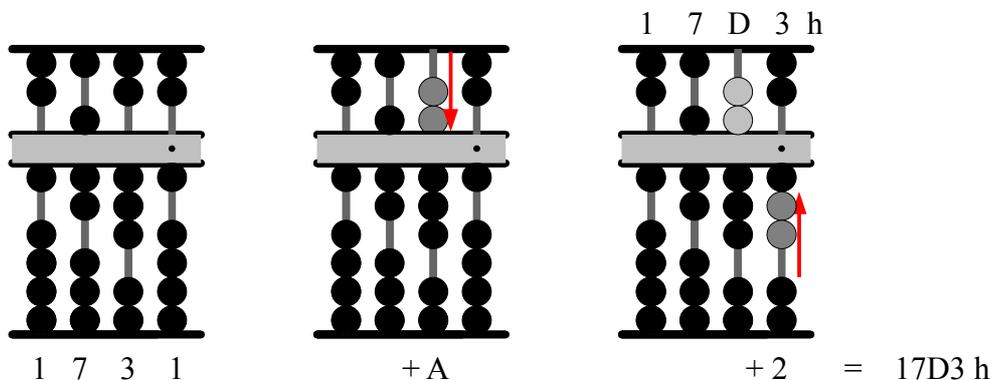
Die Abbildung zeigt diesen Teil der Rechnung. Die Rechentechnik auf dem Abakus, egal ob dezimal oder hexadezimal, besteht darin, die wenigen Paare von Ergänzungszahlen zur Zahl Zehn bzw. Sechzehn auswendig zu wissen. Bei einer Addition mit Übertrag zieht man vor dem Übertrag einfach die Ergänzungszahl ab, bevor der Übertrag erfolgt. Bei der Subtraktion würde man erst den Übertrag abziehen und dann die Ergänzungszahl addieren. Hier zunächst die Ergänzungszahlen zur Zahl 10 im Dezimalsystem:

1|9 2|8 3|7 4|6 5|5 6|4 7|3 8|2 9|1

Und nun für das Rechnen im Hexadezimalsystem die Ergänzungszahlen zur Zahl 16:

1|F 2|E 3|D 4|C 5|B 6|A 7|9 8|8 9|7 A|6 B|5 C|4 D|3 E|2 F|1

Nach diesem kleinen Exkurs wird die zweite Stelle der Beispielrechnung bearbeitet und zu der Zahl 3 die Zahl A addiert. Anschließend wird im letzten Schritt zu der Zahl 1 auf dem Stab für die Einerstelle die Zahl 2, die letzte Stelle der Ziffer 9A2h, addiert. Das Ergebnis

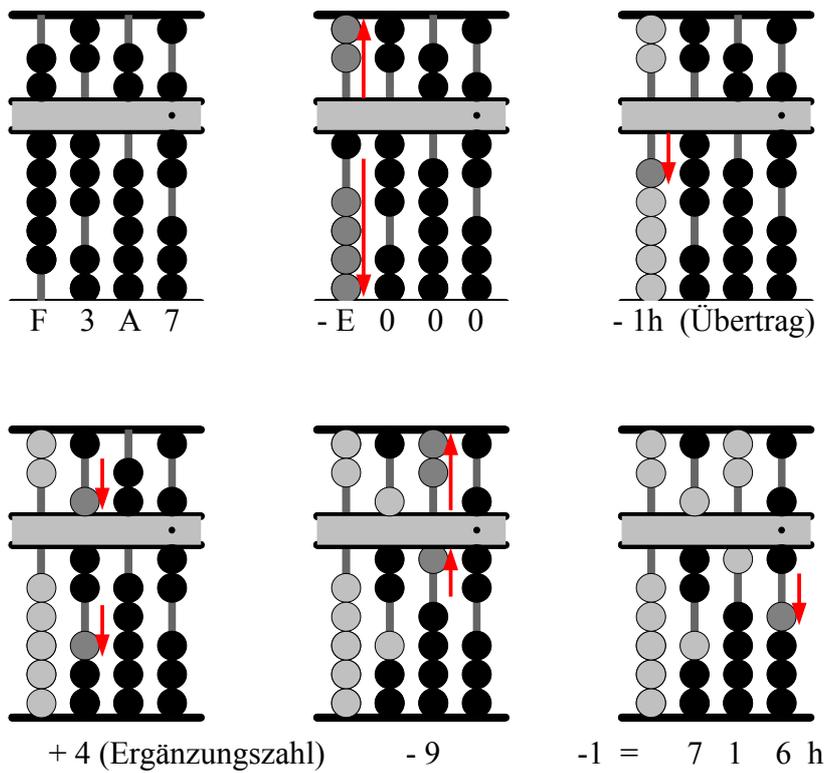


der Rechnung "E31h + 9A2h" lesen wir jetzt auf dem Abakus ab als 17D3h.

Zum Abschluss ein Beispiel für die Subtraktion von Hexadezimalzahlen:

$$F3A7h - EC91 = ?$$

Wie die folgende Abbildung zeigt, wird im ersten Schritt die Zahl F3A7 eingestellt und dann von links nach rechts arbeitend von F die Ziffer E abgezogen. Als nächstes müsste von der 3 die Ziffer C abgezogen werden. Da 3 kleiner als C ist, wird im zweiten Schritt zuerst von dem Stab links eine 1h im Übertrag abgezogen und dann im dritten Schritt die 4, als Ergänzungszahl von C, addiert. Im vierten Schritt geht man einen Stab weiter nach rechts und zieht von A die 9 ab. Zum Schluss subtrahiert man auf dem Einerstab von der 7 die 1. Als Ergebnis steht die hexadezimale 716h.



Wenn wir jetzt noch wissen wollen, wie viel 716h in unserem Dezimalsystem sind, berechnet man das auf dem japanischen Soroban - schneller als mit Excel - nach der Formel:

$$7 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0 = \underline{1814}$$